АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛ

y=f(x) функциясы [*a;b*] кесіндісінде үзіліссіз болсын. [*a;b*] кесіндісін *n* бөлікке бөлеміз: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Әр бір $[x_{i-1}; x_i]$ кесіндіден ξ_i нүкте алып, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ деп белгілеп, мынадай қосынды құрайық:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n \qquad (1)$$

(1) қосынды *y=f(x)* функциясының [*a;b*] кесіндісіндегі **интегралдық қосындысы** деп атайды.

Анықтама. *y=f(x) функциясының интегралдық қосындысының* $\max \Delta x_i \to 0$ *жағдайдағы шегі функцияның [a;b] аралығындағы* ***анықталған интегралы*** *деп аталады және* $\int_a^b f(x)dx$ *деп белгіленеді.*

Сонымен,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ , \qquad (2)$$

мұндағы *a* және *b* сандары интегралдың сәйкес **төменгі** және **жоғарғы** шектері деп аталады.

Белгіленуі мен айтылуында ұқсастық болғанымен анықталған және анықталмаған интеграл екеуі түрлі ұғымды береді: $\int f(x)dx$ - функциялар жиыны болса; $\int_a^b f(x)dx$ - нақтылы сан болады.

Егер [*a;b*] кесіндіде *f(x)>0* болса, онда анықталған интеграл анықтамасынан оның **геометриялық мағнасы** шығады: $\int_a^b f(x)dx$ - *үстіңгі жағынан y=f(x) қисығымен, бүйір жақтарынан x=a, x=b түзулерімен, астыңғы жағынан y=0 түзуімен шектелген қисық сызықты трапеция ауданы.*

Анықталған интеграл қасиеттері.

1. Тұрақтыны шек таңбасы алдына шығаруға болады:

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx.$$

2. Екі функцияның алгебралық қосындысының интегралы сол функциялар интегралдарының алгебралық қосындысына тең болады:

$$\int_a^b \left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

3. Интеграл шектерінің орындарын ауыстырғанда интеграл таңбасы қарама-қарсыға өзгереді:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

4. Интеграл шектері бірдей болғанда интеграл мәні нолге тең:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

5. Егер $m \le f(x) \le M$ болса, онда

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a).$$

6. Егер с нүктесі $[a;b]$ кесіндісінде жатқан нүкте болса, онда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

7. *Орта мән туралы теорема*. $y=f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз функция болса, онда қандай да бір $c \in [a;b]$ нүкте табылады да мына теңдік орындалады:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$$

8. Егер $y=f(x)$ функциясы жұп болса, онда

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

9. Егер $y=f(x)$ функциясы тақ болса, онда

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

10. *Ньютон-Лейбниц формуласы*.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

мұндағы $F'(x) = f(x)$.

11. Анықталған интегралдағы бөліктеп интегралдау:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

12. Анықталған интегралдағы айнымалыны алмастыру:

$$\int_a^b f(x)dx = \left\| \begin{matrix} x = g(t) \Rightarrow dx = g'(t)dt \\ a = g(t_0),\, b = g(T) \end{matrix} \right\| = \int_{t_0}^T f(g(t))g'(t)dt.$$

13. Меншіксіз интеграл. Егер *y=f(x)* функциясы $a \le f(x) < \infty$ аралығында үзіліссіз болса, онда мына шекті $\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$ **жоғары шегі шексіз меншіксіз** интеграл дейді және былай жазады:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx .$$

Теңдіктің оң жағындағы шек ақырлы болса меншіксіз **интеграл жинақталады** деп, ал шек ақырсыз немесе болмаса меншіксіз **интеграл жинақталмайды** дейді. Осыған ұқсас мынадай меншіксіз интегралдар анықталады:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx , \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b f(x)dx .$$